

## Лабораторная работа 1.4.2

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

**Цель работы:** с помощью оборотного маятника измерить величину ускорения свободного падения.

**В работе используются:** оборотный маятник с двумя подвесными призмами и двумя грузами (чечевицами); электронный счётчик времени и числа колебаний; подставка с остирем для определения положения центра масс маятника; закреплённая на стене консоль для подвешивания маятника; металлические линейки, штангенциркуль длиной 1 м.

*Работа выполняется совместно с работой 1.1.8 «Измерение ускорения свободного падения прямым методом».*

### Введение

**Внимание!** Перед выполнением работы рекомендуется познакомиться с основами теории колебаний физического маятника. Студент должны быть знакомы понятием *момента инерции* твёрдого тела, *теорема Гюйгенса—Штейнера* и формулу *периода колебаний физического маятника*. См. рекомендованную литературу [1–3].

*Физическим маятником* называют *твёрдое тело*, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, будучи подвешено за одну из своих точек в поле тяжести. Ось, проходящая через точку подвес перпендикулярно плоскости качания, называется *осью качания* маятника.

При малых колебаниях период колебаний физического маятника определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg l}}, \quad (1)$$

где  $J$  — *момент инерции* маятника относительно оси качания,  $m$  — масса маятника,  $l$  — расстояние от оси качания до центра масс маятника.

Если сравнить (1) с известной формулой колебаний математического маятника длиной  $l_m$  ( $T = 2\pi\sqrt{l_m/g}$ ), можно определить *приведённую длину* физического маятника как

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml}. \quad (2)$$

Смысл приведённой длины в том, что при длине математического маятника, равной  $l_m = l_{\text{пр}}$ , его период колебаний совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

## Теорема Гюйгенса об обратном маятнике

Пусть  $O_1$  — точка подвеса физического маятника, а  $C$  — его центр масс. Отложим отрезок длиной  $l_{\text{пр}}$  вдоль линии  $O_1C$ , и обозначим соответствующую точку как  $O_2$  — эту точку называют *центром качания* физического маятника. Заметим, что приведённая длина всегда больше расстояния до центра масс ( $l_{\text{пр}} > l$ ), поэтому точка  $O_2$  лежит по другую сторону от центра масс.

Точки  $O_1$  и  $O_2$  обладают свойством *взаимности*: если перевернуть маятник и подвесить его за точку  $O_2$ , то его период малых колебаний останется таким же, как и при подвешивании за точку  $O_1$  (*теорема Гюйгенса*). На этом свойстве — «оборотности» — и основан довольно точный метод определения ускорения свободного падения, применяемый в данной работе.

Докажем *теорему Гюйгенса* об обратном маятнике.

Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — две точки подвеса физического маятника, лежащие на одной прямой с точкой  $C$  по разные стороны от неё. Тогда периоды колебаний маятника равны соответственно

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{mgl_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{mgl_2}}. \quad (3)$$

По теореме Гюйгенса—Штейнера имеем

$$J_1 = J_C + ml_1^2, \quad J_2 = J_C + ml_2^2, \quad (4)$$

где  $J_C$  — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости качания.

Пусть периоды колебаний одинаковы:  $T_1 = T_2$ . Тогда одинаковы должны быть и приведённые длины:

$$l_{\text{пр}} = \frac{J_1}{ml_1} = \frac{J_2}{ml_2}.$$

С учётом (4)

$$l_{\text{пр}} = \frac{J_C}{ml_1} + l_1 = \frac{J_C}{ml_2} + l_2, \quad (5)$$

откуда находим (при  $l_2 \neq l_1$ )

$$J_C = ml_1 l_2. \quad (6)$$

Подставляя (6) обратно в (5), получим

$$l_{\text{пр}} = l_1 + l_2. \quad (7)$$

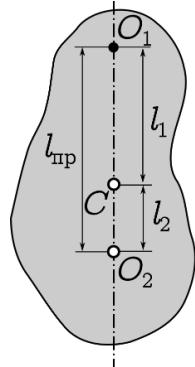


Рис. 1. К теореме Гюйгенса

Таким образом, доказано следующее: если периоды колебаний при подвешивании маятника в точках  $O_1$  и  $O_2$  равны, то расстояние между точками подвеса равно приведённой длине маятника; и наоборот, из равенства (7) следует равенство периодов  $T_1 = T_2$ .

Заметим также, что период колебаний маятника (3), выраженный как функция от  $l_1$ ,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_c + ml_1^2}{mgl_1}},$$

имеет *минимум* при  $l_{1\min} = \sqrt{J_c/m}$ . Из (6) видно, что в этой точке  $l_2 = l_1 = l_{\text{пр}}/2$ , то есть центр масс находится посередине между сопряжёнными точками  $O_1$  и  $O_2$ . График зависимости  $T(l_1)$  схематично представлен на Рис. 2.

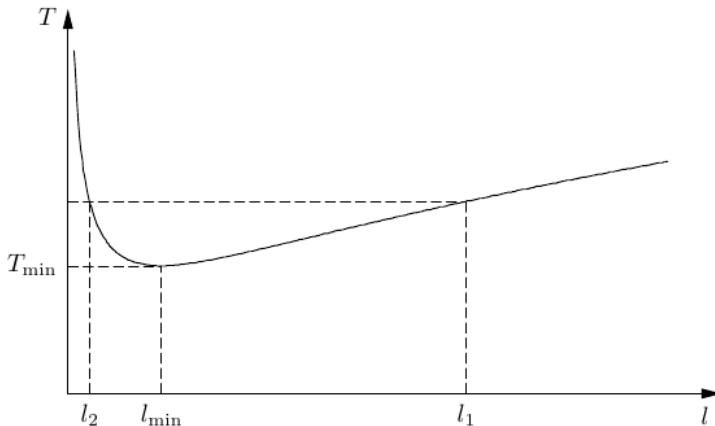


Рис. 2. Зависимость периода колебаний от положения центра масс относительно оси качания

### Измерение $g$

Пусть  $L \equiv \overline{O_1O_2} = l_1 + l_2$  — расстояние между двумя «сопряжёнными» точками подвеса физического маятника. Если соответствующие периоды малых колебаний равны,  $T_1 = T_2 = T$ , то по теореме Гюйгенса  $L = l_{\text{пр}}$ . Тогда из (1) и (2) находим ускорение свободного падения:

$$g_0 = (2\pi)^2 \frac{L}{T^2}. \quad (8)$$

Точного совпадения  $T_1 = T_2$  на опыте добиться, конечно, невозможно. Поэтому получим формулу для определения ускорения свободного падения  $g$ , если измеренные периоды незначительно различаются:

$$T_1 = T, \quad T_2 = T + \Delta T.$$

Из системы (3) и (4) получаем:

$$g = (2\pi)^2 \frac{l_1^2 - l_2^2}{T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2}, \quad (9)$$

что также можно переписать как

$$g = g_0 \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda - \frac{T_2^2}{T_1^2}}, \quad (10)$$

где  $g_0 = (2\pi)^2 L/T^2$ , и для краткости введено обозначение  $\lambda = l_1/l_2$ .

Проанализируем отличия формулы (9) от (8) и оценим величину поправки. Пусть  $\varepsilon = \frac{\Delta T}{T} \ll 1$  — относительное отклонение при измерении периодов. Тогда при  $\lambda \neq 1$ , пользуясь малостью  $\varepsilon$ , получим

$$g = g_0 \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda - (1 + \varepsilon)^2} \approx g_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda - 1}} \approx g_0 \cdot \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\lambda - 1}\right), \quad (11)$$

Видно, что поправка  $\Delta g \approx \frac{2\varepsilon g}{\lambda - 1}$  к формуле (8) остаётся малой, если мало относительное различие измеренных периодов  $\varepsilon$ , но при этом также мал и коэффициент  $\frac{1}{\lambda - 1} = \frac{l_2}{l_1 - l_2}$ . В частности, при  $l_2 \rightarrow l_1$  эта поправка *неограниченно* возрастает при любом ненулевом  $\varepsilon$ . Поэтому на опыте отношение  $l_1/l_2$  не должно быть слишком близко к единице. На практике желательно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{l_1}{l_2} > 1,5. \quad (12)$$

(более точную оценку см. ниже в п. «Оценка погрешностей»).

### Экспериментальная установка

В работе используются маятники в форме стержней цилиндрического или прямоугольного сечения длиной  $\sim 1$  м и массой  $\sim 1 \div 1,5$  кг. Маятник подвешивается с помощью небольших треугольных призм ( $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ ), острым основанием опирающихся на закреплённую на стене консоль. Ребро призмы задаёт ось качания маятника. На стержне закрепляются два дополнительных груза в форме «чечевицы» ( $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ). Для выполнения условия  $l_1 > l_2$  внешнюю чечевицу  $\Gamma_2$  следует крепить за призмой  $\Pi_2$ , а чечевицу  $\Gamma_1$  (внутреннюю) — между призмами  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (см. Рис. 3).

Регистрация времени колебаний проводится с помощью электронных счётчиков. Расстояния между точками установки маятников на консоли до электронных счётчиков фиксировано. Это накладывает ограничения на

расположение призм и грузов на стержне. Призмы крепятся *симметрично* на равном расстоянии от концов стержней так, чтобы маятник при колебаниях пересекал фотоприёмники счётчика, *не задевая оправу счётчика*.

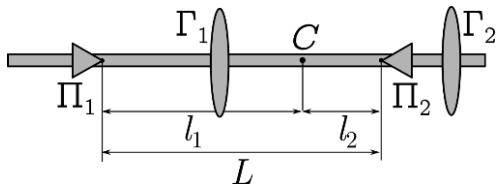


Рис. 3. Маятник с грузами

Фиксированное положение призм однозначно задаёт приведённую длину оборотного маятника  $l_{\text{пр}} = L$ . Изменять в опыте можно только положения грузов на стержне. Главная задача опыта — подобрать такое положение грузов, при котором периоды колебаний при перевороте маятника совпадали бы с достаточно высокой точностью, а для положения центра масс маятника выполнялось при этом условие (12).

### Предварительный расчёт положения грузов

Если первоначально расположить грузы на стержне произвольным образом, то для достижения равенства периодов колебаний потребуется исследовать зависимости периодов колебаний  $T_1$  и  $T_2$  при перемещении по-очерёдно обоих грузов по штанге. При этом всякий раз необходимо при перестановке призм переворачивать тяжёлый маятник. Такая методика требует много времени и не всегда приводит к нужному результату.

Существенно облегчить и ускорить поиск нужного положения грузов можно, если провести *предварительные расчёты*. При этом для грубой оценки достаточно использовать максимально упрощённую модель, например, считать маятник *тонким стержнем* с закреплёнными на нём *точечными* массами. После установки грузов согласно предварительным расчётом, их положение может быть уже уточнено экспериментально.

Пусть призмы  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  задают сопряжённые точки подвеса, то есть период колебаний при перевороте маятника не изменяется. Тогда по теореме Гюйгенса расстояние между призмами  $L$  — это приведённая длина маятника. Это условие может быть записано либо в форме (2):

$$J_{\Pi} = M L l_2, \quad (13)$$

где  $J_{\Pi}$  — момент инерции маятника *относительно призмы  $\Pi_2$* , либо в форме (5):

$$J_C = M l_1 l_2, \quad (13')$$

где  $J_C$  — момент инерции маятника относительно его *центра масс*. Здесь  $M$  — полная масса маятника.

Как  $J_{\Pi}$ , так и  $J_C$  являются функциями положений грузов  $b_1$  и  $b_2$  относительно соответствующих призм  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (см. Рис. 6). Задание длины  $l_1$  (или  $l_2$ ) определяет положение центра масс маятника. Это позволяет, во-первых, рассчитать правые части (13) или (13'), и, во-вторых, накладывает дополнительную связь на расстояния  $b_1$  и  $b_2$  (при известных массах всех элементов маятника). Тогда соотношения (13) или (13') превращаются в уравнение с *одной* неизвестной, например,  $b_2$ . Корень этого уравнения можно приблизённо найти графически, например, с помощью электронных таблиц\*. Дополнительные сведения о методике подбора положения грузов приведены в **Приложении 1**.

### Оценка погрешностей

Оценим влияние погрешностей измерений на точность расчётов по формуле (9). Пусть все периоды измерены с одинаковой погрешностью  $\sigma_T$ , расстояние  $L$  между точками подвеса с погрешностью  $\sigma_L$ , расстояния  $l_{1,2}$  до центра масс с погрешностью  $\sigma_l$ . Погрешность определения величины  $g_0$  (по формуле (8)) равна

$$\frac{\sigma_{g_0}}{g_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2}. \quad (14)$$

Это — основная погрешность опыта. Видно, что для её минимизации необходимо максимально точно измерить расстояние между точками повеса  $L$  и период колебаний маятника  $T$ .

**Пример.** Максимально достижимая точность измерения длины  $L$  при измерениях штангенциркулем составляет  $\varepsilon_L = \sigma_L/L \sim 10^{-4}$  (0,01%) ( $\sigma_L \approx 0,1$  мм,  $L \sim 1$  м). Погрешность периода может быть уменьшена за счёт увеличения времени измерения  $t$  (то есть, числа колебаний  $n = t/T$ ). При измерении электронным счётчиком погрешность измерения полного времени составляет порядка  $\sigma_t = 0,01$  с (погрешность округления последнего разряда). Тогда вклад от периода в общую погрешность  $g$  не превысит  $\varepsilon = 0,01\%$ , если полное время измерения составит не менее  $t = 2\frac{\sigma_t}{\varepsilon} = 200$  с.

Проанализируем влияние поправки  $g = g_0 + \Delta g$ , где согласно (11)

$$\Delta g \approx 2\beta \frac{\Delta T}{T} g_0, \quad \beta = \frac{l_2}{l_1 - l_2}.$$

Общая формула для погрешности (9) слишком громоздка, поэтому для наглядности анализа проведём вычисления *приближённо*. Достаточно

---

\* В данном случае уравнение является квадратным и может быть, конечно, решено аналитически. Однако мы предлагаем использовать именно графический метод как более общий и наглядный.

учесть, что основной вклад в относительную погрешность  $\Delta g$  вносят величины  $\Delta T$  и  $\Delta l = l_1 - l_2$ , поскольку являются разностями двух близких величин. Поэтому

$$\frac{\sigma_{\Delta g}}{g} \approx \frac{2\beta\Delta T}{T} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta T}}{\Delta T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta l}}{\Delta l}\right)^2} = \sqrt{8\left(\beta \frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + 8\left(\beta \frac{\Delta T}{T} \frac{\sigma_l}{\Delta l}\right)^2}.$$

(здесь мы для воспользовались формулой погрешности разности, которая даёт  $\sigma_{\Delta l} = \sqrt{2}\sigma_l$  и  $\sigma_{\Delta T} = \sqrt{2}\sigma_T$ ). Тогда для полной относительной погрешности получим

$$\frac{\sigma_g}{g} \approx \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4(1+2\beta)\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + 8\left(\beta \frac{\Delta T}{T} \frac{\sigma_l}{\Delta l}\right)^2}. \quad (15)$$

Из этого результата можно сделать следующие выводы. Во-первых, при достаточно хорошем совпадении периодов ( $\Delta T \ll T$ ) погрешность измерения длин  $l_1$  и  $l_2$  по отдельности практически не влияет на погрешность конечного результата, поскольку вклад последнего (3-го) слагаемого будет заведомо мал. И, во-вторых, итоговая погрешность неограниченно возрастает при  $l_1 \rightarrow l_2$ , т. е., когда центр масс маятника оказывается близок к геометрическому центру стержня.

Проведём оценочные расчёты. Вклад от погрешности измерения

периода (2-е слагаемое (15)) вырастет не более чем вдвое при  $\sqrt{1+2\beta} < 2$ , то есть  $\beta < 3/2$  и

$$l_1/l_2 > 5/3 \approx 1,67.$$

А вот разность длин менее, чем  $\Delta l/l = 15\%$ , ухудшит общую точность уже на порядок. График зависимости величины  $\beta$  от  $l_1/l_2$  приведён на Рис. 5.

Оценим вклад последнего (3-го) слагаемого в (15). Пусть число колебаний равно  $n = 200$  и относительная погрешность измерения периода составляет  $\varepsilon_T = \sigma_T/T = \frac{0,01}{200} = 5 \cdot 10^{-5}$ , а относительная точность совпадения периодов при перевороте маятника равна  $\Delta T/T \sim 10^{-2}$  (1%). Тогда для обеспечения заданной погрешности (3-е слагаемое не превышает остальные) длины  $l_{1,2}$  достаточно измерять с относительной погрешностью  $\sigma_l/l \sim 10^{-2}$  (1%). Такая точность измерения положения центра масс вполне достижима на практике. Наконец, отсюда же видно, что при относительной погрешности определения положения центра масс в 1% ( $\sigma_l = 1$  мм при  $l \sim 10$  см) нет необходимости добиваться совпадения периодов точнее, чем  $\Delta T/T \sim 1\%$ .

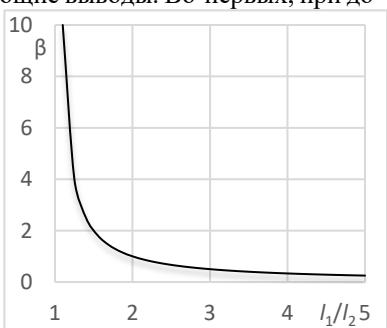


Рис. 4. Зависимость коэффициента  $\beta$  от положения центра масс

## ЗАДАНИЕ

1. Снимите маятник с консоли и взвесьте его целиком. Снимите грузы и призмы с маятника и взвесьте все его элементы по отдельности (если элементы маятника являются несъёмными, соответствующие значения масс указаны на установке). Оцените погрешность измерения масс.
2. Закрепите подвесные призмы симметрично на стержне (положения призм указаны на установке), предварительно поместив груз  $\Gamma_1$  между призмами. Убедитесь, что ребра призм параллельны друг другу и «смотрят» в сторону центра маятника.
3. С помощью большого штангенциркуля максимально точно измерьте расстояние  $L$  между призмами. В дальнейшем призмы должны оставаться закреплёнными на своих местах. Оцените погрешность измерения длины.
4. Задавшись некоторым значением  $l_1/l_2$ , удовлетворяющим условию (12), рассчитайте по одной из методик, описанных в Приложении 1, положения грузов («чечевиц») на стержне. Закрепите их на соответствующих местах.
5. С помощью L-образной подставки определите положение центра масс маятника с грузами. Измерьте расстояния  $l_1$  и  $l_2$ : от центра масс до острия призм  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  соответственно. Убедитесь, что условие (12) выполнено. Сравните результат с расчётом по формуле (16).

**Внимание!** Важно не перепутать местами длины  $l_1$  и  $l_2$  (а также периоды  $T_1$  и  $T_2$ ). Для этого рекомендуется пометить призмы  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  карандашом.

6. Подвесьте маятник на консоли на призме  $\Pi_2$ . Включите электронный счётчик и убедитесь в работоспособности системы (маятник при качании не касается элементов установки и не проскальзывает в подвесе, счётчик корректно считает количество колебаний и их время).
7. Проведите измерение времени  $n = 10$  колебаний. Повторите измерение 3–4 раза, всякий раз отклоняя маятник на *один и тот же* малый угол  $\alpha \sim 5^\circ$  (останавливайте и отклоняйте маятник заново при каждом повторении измерений). Рассчитайте период колебаний  $T_2$ .

Если результаты измерений *одинаковы*, считайте погрешность измерения времени  $\sigma_t$  равной приборной погрешности секундомера (для цифрового секундомера — единица последнего разряда дисплея).

Если результаты измерений оказались *различны*, повторите измерения не менее 10 раз и определите случайную погрешность измерения времени  $\sigma_t$  как *среднеквадратичное отклонение* результатов.

8. Переверните маятник, подвесив его на призму  $\Pi_1$  (при неизменном положении остальных элементов!). Проведите измерение периода  $T_1$ .
9. Сравните значения  $T_1$  и  $T_2$ . Если различие не превышает  $\Delta T/T \sim 1\%$ , переходите к следующему пункту.

*В противном случае*, переместите груз  $\Gamma_2$  на небольшое расстояние (2–4 мм) и повторите измерения периодов по п. 7–8. Если совпадение периодов из-за этого ухудшилось — попробуйте сместить груз  $\Gamma_2$  в противоположную сторону. Продолжайте измерения методом последовательных приближений до достижения требуемой степени совпадения. При подборе положений грузов достаточно проводить каждый раз по одному измерению с  $n = 10$  колебаний.

10. Проведите окончательное измерение периодов  $T_1$  и  $T_2$  с максимальной точностью. Количество колебаний  $n$ , по которым следует производить измерения периодов, рассчитайте самостоятельно исходя из требуемой точности опыта (рекомендуемая точность — не хуже  $\varepsilon = 0,05\%$ ) и погрешности измерения времени  $\sigma_t$ , определённой в п. 7.

**Примечание.** В процессе измерений следует попутно убедиться, что амплитуда колебаний затухает за время опыта незначительно. Если за  $n$  колебаний амплитуда уменьшается более, чем в 2 раза, следует измерять период по меньшему числу колебаний.

11. Снимите маятник с консоли. Если положение грузов в п. 9 изменилось, измерьте новое положение центра масс и расстояния  $l_1$  и  $l_2$ . Убедитесь, что они по-прежнему удовлетворяют условию (12).
12. Определите ускорение свободного падения  $g$ . Оцените погрешность конечного результата. Сравните результат с табличным.
13. *\* По заданию преподавателя* выполните следующие измерения
  - a. Проверьте влияние амплитуды колебаний на точность измерений. Экспериментально убедитесь, что для используемой в работе амплитуды  $\alpha \approx 5^\circ$  соответствующая поправка к периоду колебаний мала по сравнению с погрешностью опыта. Для этого проведите измерения при вдвое меньшей амплитуде и сравните результаты.
  - б. Проверьте влияние затухания колебаний маятника на точность измерения. Измерьте число колебаний, за которое амплитуда уменьшается вдвое, вычислите декремент затухания колебаний и убедитесь, что поправка к периоду колебаний мала по сравнению с погрешностью опыта (см., например, [1, п. 10.5]).
14. Выполните измерение ускорения свободного падения по времени падения шарика в поле тяжести (см. **работу 1.1.8**).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть  $b_1$  — расстояние от груза  $\Gamma_1$  до призмы  $\Pi_2$ , а  $b_2$  — расстояние от груза  $\Gamma_2$  до призмы  $\Pi_1$  (см. Рис. 6). Массы элементов маятника: стержня —  $m_{ct}$ , подвесных призм —  $m_{np1}$  и  $m_{np2}$ , грузов —  $m_1$  и  $m_2$ , полная масса маятника  $M = m_{ct} + m_{np1} + m_{np2} + m_1 + m_2$ .

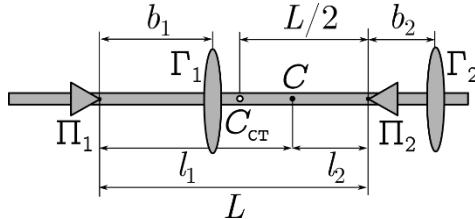


Рис. 5. Расположение грузов и призм на маятнике.  
 $C$  — центр масс маятника,  $C_{ct}$  — центр масс стержня.

Положение  $l_1$  центра масс маятника относительно призмы  $\Pi_1$ :

$$l_1 = \frac{m_{ct}L/2 + m_{np2}L + m_1b_1 + m_2(b_2 + L)}{M} \quad (16)$$

Здесь мы считаем, что призмы расположены на стержне *симметрично* и центр масс *стержня* равноудалён на расстояние  $L/2$  от призм.

Все вычисления могут быть частично автоматизированы с помощью электронных таблиц.

### А. Расчёт с использованием моментов инерции относительно подвеса

В данном методе все моменты инерции вычисляются относительно точки подвеса маятника  $\Pi_2$ . Положение центра масс ( $l_1$  и  $l_2$ ) считается заданным, вычисляются соответствующие положения грузов  $b_2$  и  $b_1$ .

Используются следующие соотношения:

- момент инерции тонкого стержня длиной  $l_{ct}$  с призмами:

$$J_{ct} = m_{ct} \left( \frac{l_{ct}^2}{12} + \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right) + m_{np2}L^2,$$

- момент инерции грузов на стержне:

$$J_{gp} = m_1(L - b_1)^2 + m_2b_2^2,$$

- суммарный момент инерции маятника из (13):  $J_{\Pi} = MLL_2$ .

Расчёт проводится по следующему алгоритму:

1. Задаём желаемое значение расстояния  $l_1/l_2$ , удовлетворяющее условию (12).

2. По известным массам находим  $J_{\Pi}$  и  $J_{\text{ст}}$  (они зависят только от  $l_2$  и  $L$ ).
3. Варьируя длину  $b_2$  в пределах от  $b_{2\min} = 0$  до  $b_{2\max} = (l - L)/2$ , вычисляем по формуле (16) соответствующее положение первого груза  $b_1$ , а затем момент инерции грузов  $J_{\text{гр}}$ .
4. Строим график  $J_{\text{гр}}(b_2)$  и по точке пересечения с уровнем  $J_{\text{гр}} = J_{\Pi} - J_{\text{ст}}$  определяем искомые положения грузов  $b_2$  и  $b_1$ .
5. Проверяем, реализуемы ли расчётные  $b_2$  и  $b_1$  на практике (не слишком ли грузы слишком близко к призмам и т.п.). В противном случае следует выбрать другое отношение  $l_1/l_2$  и повторить расчёт.

## Б. Расчёт с использованием центральных моментов инерции

В данном методе все моменты инерции вычисляются относительно *центра масс* маятника. Заданным считается положение  $b_2$  второго груза. Вычисляются соответствующее положение центра масс ( $l_1$  и  $l_2$ ) и первого груза  $b_1$ .

Используются следующие соотношения:

- Момент инерции стержня длиной  $l_{\text{ст}}$  с призмами:

$$J_{\text{ст}} = m_{\text{ст}} \left( \frac{l_{\text{ст}}^2}{12} + \left( \frac{L}{2} - l_2 \right)^2 \right) + m_{\text{пп1}} l_1^2 + m_{\text{пп2}} l_2^2.$$

- Момент инерции грузов:

$$J_{\text{гр}} = m_1(l_1 - b_1)^2 + m_2(l_2 + b_2)^2.$$

- Суммарный момент инерции всего маятника (13):  $J_0 = Ml_1l_2$ .

Расчёт проводится по следующему алгоритму:

1. Варьируя длину  $l_2$  в пределах от  $l_{2\min}$  (см. замечание ниже) до  $l_{2\max} = L/2$ , вычисляем соответствующие значения моментов инерции всего маятника  $J_0$  и стержня с призмами  $J_{\text{ст}}$ .
2. Выбираем и фиксируем некоторое значение расстояния  $b_2$ , и рассчитываем соответствующие значения  $b_1$ , и вычисляем момент инерции грузов  $J_{\text{гр}}$ .
3. Строим графики зависимости  $J_{\text{гр}}$  и  $J_0 - J_{\text{ст}}$  от величины  $l_2$ .
4. По пересечению двух графиков определяем искомое положение центра масс  $l_2$  (заметим, что корня может быть два!).
5. Проверяем, что длина  $l_2$  удовлетворяющая условию (12). Вычисляем соответствующее положение первого груза  $b_1$ . Проверяем, что положения грузов являются физически реализуемыми (грузы не слишком близко к призмам и т.п.).

6. При необходимости изменяем свободный параметр — положение второго груза  $b_2$  — и повторяем вычисления.

**Замечание.** На величину  $l_2$  имеется ограничение *снизу*. На Рис. 7 приведён график зависимости  $J_{ct}$  и  $J_0$  для разных значений  $l_2$  при характерных параметрах опыта. Видно, что момент инерции  $J_0$  растёт при увеличении  $l_2$ , достигая максимума при  $l_1 = l_2 = L/2$ , а момент инерции стержня с призмами  $J_{ct}$  уменьшается, если центр масс маятника приближается к центру масс стержня. При малых  $l_2$  графики  $J_{ct}$  и  $J_0$  пересекаются. Разность  $J_0 - J_{ct}$  равна моменту инерции грузов  $J_{\text{груз}}$  относительно центра масс маятника, поэтому должно выполняться условие  $J_{ct} > J_0$ , и следовательно, существует минимально возможная величина расстояния  $l_2$  (в частности, из Рис. 7 имеем  $l_2 > 7$  см).

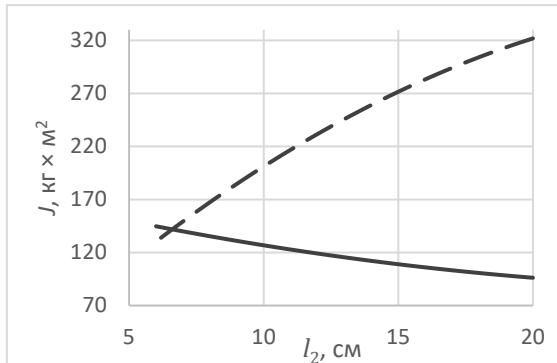


Рис. 6. Пример зависимости  $J_{ct}$  (сплошная) и  $J_0$  (пунктир) для разных значений  $l_2$ .

## Литература

1. Кириченко Н.А., Крымский К.М. Общая физика. Механика. — Москва : МФТИ, 2013. — Гл. 10.3.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. — Москва : Физматлит, 2005. — § 41.
3. Лабораторный практикум по общей физике. Т. 1. Механика. Под ред. А.Д. Глазуна. — Москва : МФТИ, 2012. — Раздел IV.

*Составители:*  
Смирнова О.И., Попов П.В., 2021  
испр. 04.10.2024